

3 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

ТЕМА 3.1 МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества.

Строками матрицы называются горизонтальные ряды таблицы.

Столбцами матрицы называются вертикальные ряды таблицы.

Матрицы обозначают латинскими заглавными буквами: $A, B, C, X, \dots$.

Запись a_{ij} используется для обозначения элемента матрицы находящегося на пересечении i -той строки и j -того столбца.

Числовую матрицу размером $m \times n$ (т. е. состоящую из m строк и n столбцов чисел) в общем случае записывают в виде:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или в краткой форме $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Если $m = n$, то матрицу называют **квадратной порядка n** и обозначают $A_{n \times n}$. Элементы a_{ii} , $i = \overline{1, n}$, $n \in N$, такой матрицы образуют её **главную диагональ**. Элементы a_{ij} , $i = \overline{n, 1}$, $j = \overline{1, n}$, $n \in N$, такой матрицы образуют её **побочную диагональ**.

Квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $n \in N$, называется **диагональной**. Если $a_{ii} = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$ то матрица (1.1) называется **единичной** и обозначается $E_{n \times n}$.

Верхней треугольной матрицей называется матрица вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

все элементы которой, стоящие ниже главной диагонали равны нулю.

Нижней треугольной матрицей называется матрица вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

все элементы которой, стоящие выше главной диагонали равны нулю.

Трапецевидной матрицей называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ где числа } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \text{ отличны от нуля.}$$

Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется, соответственно, **вектор-строка** или **вектор-столбец**.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Обозначают такую матрицу $O_{m \times n}$.

Две матрицы одинакового размера $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ и $B_{m \times n} = [b_{ij}]$ (1.2)

называются **равными**, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Суммой матриц (1.2) называется матрица $C = A + B$ размером $m \times n$, состоящая из элементов $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на число α называется матрица $\alpha A_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]$.

Разностью матриц (1.2) называется матрица $C = A - B$ размером $m \times n$, состоящая из элементов $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Противоположной к B называется матрица $-B$, такая что $-B = (-1)B$.

Свойства операций сложения матриц и умножения на число:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $A + 0 = A$;
- 4) $A + (-A) = 0$;
- 5) $1 \cdot A = A$;
- 6) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A$, где $\alpha, \beta \in R$;
- 7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, где $\alpha, \beta \in R$;
- 8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, а матрицы A, B – одинакового размера.

Пример. Найти $3A - 2B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение: матрицы A и B имеют одинаковый размер 2×3 . Поэтому по определению линейных операций над матрицами имеем:

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 - 10 & -3 - 4 & 3 - (-4) \\ 9 - 2 & 12 - 0 & 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 7 \\ 7 & 12 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется матрицей?
2. Что называется строкой матрицы? Столбцом матрицы?
3. Как обозначаются элементы матрицы?
4. Какую матрицу называют квадратной?
5. Какие элементы образуют главную диагональ квадратной матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Является ли диагональная матрица квадратной?
8. Какая матрица называется единичной?
9. Является ли единичная матрица диагональной?
10. Какая матрица называется нижней треугольной? Верхней треугольной?
11. Какая матрица называется трапециевидной?
12. Какая матрица называется нулевой?
13. Какие матрицы называются равными?
14. Какие матрицы можно складывать (вычитать)?
15. Дайте определение суммы матриц? Разности матриц?
16. Как умножить матрицу на число?
17. Какая матрица называется противоположной к данной?

Решите самостоятельно:

1. Найдите линейную комбинацию $-2A + 5B$ матриц A и B , если:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$; Ответ: $\begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 15 & 12 \\ -3 & -11 \end{bmatrix}$

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Ответ: $\begin{bmatrix} 13 & -4 & 8 \\ 20 & 8 & 1 \\ 37 & -11 & 12 \end{bmatrix}$

2. Найдите сумму и разность матриц A и B , если:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\text{Ответ: } A + B = \begin{bmatrix} 2\cos \varphi & 0 \\ 0 & 2\cos \varphi \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & -2\sin \varphi \\ 2\sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

3. Найдите линейную комбинацию $2(A + B) - 3C$ матриц A , B и C , если:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}. \quad \text{Ответ: } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 11 \\ 2 & -24 \end{bmatrix}.$$

ТЕМА 3.2 ТРАНСПОНИРОВАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ. СТЕПЕНЬ МАТРИЦЫ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица

$C_{m \times k} = A \cdot B$, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} – элементы матриц A и B . Для получения элемента c_{ij} матрицы C умножают последовательно каждый элемент i -й строки матрицы A на соответствующий элемент j -го столбца матрицы B и находят сумму этих произведений.

Отсюда следует, что произведение матрицы AB существует только в том случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B .

Свойства операции умножения матриц

- 1) $A_n \cdot E_n = E_n \cdot A_n = A_n$;
- 2) $A_n \cdot O_n = O_n \cdot A_n = O_n$;
- 3) $(AB)C = A(BC)$;
- 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
- 5) $(A+B)C = AC + BC$;
- 6) $A(B+C) = AB + AC$.

В общем случае из существования AB не следует существование BA . Даже если оба эти произведения определены, они не всегда равны. Матрицы, для которых $AB=BA$, называются **перестановочными**.

Пусть A – квадратная матрица. Тогда k -я степень ($k \in \mathbb{N}$) матрицы A определяется равенством $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}$.

По определению принимают $A^0 = E$ при условии $A \neq 0$.

Матрица A^T , полученная из матрицы A заменой каждой её строки столбцом с теми же номером, называется **транспонированной** к матрице A .

Переход от матрицы A к матрице A^T называется **транспонированием**. Если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n \times m$. В частности, если матрица A является вектор-столбцом, то A^T является вектор-строкой и наоборот. Транспонирование квадратной матрицы приводит к квадратной матрице того же порядка.

Свойства операции транспонирования матриц

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- 4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Пример 1. Если возможно, вычислить соответствующие произведения и проверить справедливость равенства $AB = BA$ для следующих пар матриц:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$3) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \quad 4) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение:

1) Так как матрица A имеет размер 2×2 , а матрица B – размер 2×3 , т. е. количество столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B . Значит произведение AB существует, найдём его по определению

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -7 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

Так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A , то произведение BA не существует.

2) Произведения AB и BA могут быть найдены, так как в обоих случаях выполняется условие, для существования произведения:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Приходим к выводу, что $AB \neq BA$.

Приведенный пример иллюстрирует не только отсутствие свойства коммутативности операции умножения для многих согласованных для этого действия матриц, но и показывает, что при умножении двух ненулевых матриц может быть получена нулевая.

3) Для матриц A и B условие существования произведений AB и BA выполняется, но произведения AB и BA имеют разные размеры и элементы:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) & 1 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 7 & -9 & 23 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}.$$

AB и BA – квадратные матрицы размеров 3×3 и 2×2 соответственно, $AB \neq BA$.

4) Произведение AB и BA будет существовать так как обе матрицы квадратные одинаковой размерности:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Значит $AB=BA$

Очевидно, что условие будет соблюдаться для любых диагональных

матриц одного размера.

Пример 2. Найти матрицу X , удовлетворяющую условию $2A^T + \left(\frac{1}{3}\right)X = E$, если известна матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. Из равенства $2A^T + \left(\frac{1}{3}\right)X = E$ выразим матрицу X :

$$\left(\frac{1}{3}\right)X = E - 2A^T, \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)X = 3 \cdot (E - 2A^T), \quad X = 3 \cdot (E - 2A^T),$$

так как $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, а $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, то

$$X = 3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right) = 3 \begin{bmatrix} 1-2 \cdot 4 & 0-2 \cdot 1 \\ 0-2 \cdot (-2) & 1-2 \cdot 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -6 \\ 12 & -15 \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц в горном деле:

Большинство горных машин, выполняя операции по выемке, транспортированию и переработке полезных ископаемых тем или иным образом перемещаются в пространстве. Для определения движения машин в целом, отдельных её механизмов и частей необходимо выбрать системы координат, в которых это движение определяется. Неподвижная система координат обычно связывается с географическим положением месторождения полезного ископаемого. Подвижная система координат передвигается вместе с машиной и её полюс совмещается с какой-либо характерной точкой машины (центр масс, центр опорной площади и т.д.) Положение подвижной системы координат относительно неподвижной обычно задаётся декартовыми координатами её полюса и тремя углами Эйлера, с помощью которых определяется сферическое движение подвижной системы. При использовании углов Эйлера положение подвижной системы обычно определяют таблицей косинусов между осями подвижной и неподвижной систем декартовых координат. Эта таблица вычисляется как произведение матриц направляющих косинусов.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется произведением матриц?
2. При каком условии произведение AB матриц A и B существует?
3. Какие матрицы называются перестановочными?
4. Какая матрица называется транспонированной к матрице A ?
5. Может ли произведение двух не нулевых матриц быть равным нулю?

Решите самостоятельно:

1. Найдите матрицу X из условия $\left(\frac{1}{2}\right)X + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 2E$.

Ответ: $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -12 \\ 0 & -14 & 12 \\ -24 & 6 & -14 \end{bmatrix}$.

2. Найдите $(A^T + 3B)^2$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{bmatrix}$.

3. Найдите те из произведений AB , BA , AC , CA , BC , CB , которые существуют, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; $AC = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

ТЕМА 3.3 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1) перестановка местами любых двух параллельных рядов (строк, столбцов);

2) умножение каждого элемента ряда (строки, столбца) на одно и то же число не равное нулю;

3) прибавление к элементам ряда (строки, столбца) соответствующих элементов любого другого параллельного ряда (строки, столбца), умноженных на одно и то же ненулевое число.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований матрицы можно привести к треугольной или трапециевидной форме.

Пример. Привести матрицу A к треугольному виду с помощью элементарных преобразований, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Поменяем строки местами, получим матрицу, эквивалентную исходной:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Затем запишем вместо второй строки сумму первой, умноженной на (-2) , и второй, а вместо третьей – результат сложения первой, умноженной на (-3) , и третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Осталось прибавить к третьей строке вторую, умноженную на (-2) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате получена треугольная матрица, эквивалентная матрице A . Эти преобразования можно записать в виде:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки:

1. Назовите какие операции относятся к элементарным преобразованиям матрицы?
2. Какие матрицы называются эквивалентными?
3. К какому виду можно привести матрицу с помощью элементарных преобразований?

Решите самостоятельно:

1. Приведите матрицу к трапециевидной или треугольной форме:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

ТЕМА 3.4 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ИХ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы. Определитель матрицы $A_{n \times n}$ обозначается одним из следующих символов:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_A.$$

Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу. Порядок определителя равен порядку матрицы, которую он характеризует.

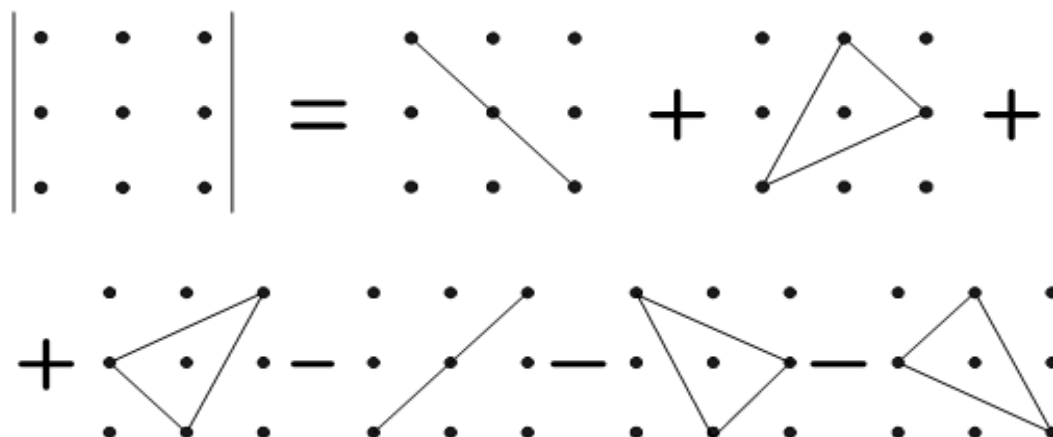
Определитель 1 порядка: $|a_{11}| = a_{11}$.

Определитель 2 порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Определитель 3 порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка используют **правило треугольников (правило Саррюса)**, которое схематично можно изобразить следующим образом:



Минором M_{ij} элемента a_{ij} , где $i, j = \overline{1, n}$, определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, получаемый вычёркиванием i -й строки и j -го столбца на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} , называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Свойства определителей:

1) Значение определителя не изменится после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот;

2) Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера строки (столбца) и равна этому определителю:

разложение определителя по элементам i -той строки

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

разложение определителя по элементам j-того столбца

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$$

3) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

4) перестановка двух строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный;

5) $|A| = 0$, если выполняется одно из следующих условий:

- в определителе есть нулевая строка (нулевой столбец);
- в определителе есть пропорциональные строки (столбцы);
- в определителе есть строки (столбцы), являющиеся линейной комбинацией соответствующих элементов других строк (столбцов);

7) если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить линейную комбинацию соответствующих элементов других строк (столбцов), то значение определителя не изменится;

8) определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Метод эффективного понижения порядка:

Используя основные свойства определителей, вычисление определителя n-го порядка не равного нулю $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя (n-1)-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю.

Для вычисления определителя порядка выше третьего удобно пользоваться методом эффективного понижения порядка или методом приведения определителя к треугольному виду.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ различными способами.

Решение. 1-й способ. Используем правило треугольников (правило Саррюса):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 - ((-1) \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2) =$$

$$= 20 - 4 - (-12 + 2) = 26.$$

2-й способ. Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (20 - 2) + 0 - (4 - 12) = 26.$$

3-й способ. Воспользуемся методом эффективного понижения порядка. Обнулим элементы первой строки. Для этого прибавим к элементам 3-го столбца элементы 1-го столбца. Затем разложим определитель по элементам

первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 6 = 26.$$

4-й способ. Используя свойства определителя, приведем его к треугольному виду:

- 1) Прибавим к элементам второй строки элементы первой, умноженной на (-2), а к элементам третьей строки элементы первой, умноженные на (-3);
- 2) Поменяем местами вторую и третью строки, определитель поменяет знак на противоположный;
- 3) Прибавим к элементам третьей строки элементы второй, умноженной на (-2);

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 \cdot (-13)) = 26$$

Вопросы для самопроверки:

1. Для какой матрицы вводится понятие определителя?
2. Чему равен определитель первого порядка?
3. Как вычисляется определитель второго порядка?
4. Запишите правило треугольников (правило Саррюса) для определителя третьего порядка.
5. Что называется, минором элемента a_{ij} определителя n -го порядка?
6. Что называется, алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n -го порядка?
7. Чему равен определитель треугольной матрицы?
8. Как изменится определитель, если поменять местами две строки (два столбца)?
9. Чему равен определитель, если в нём есть нулевая строка (столбец)?
10. Сформулируйте метод эффективного понижения порядка.
11. Как вычислить определитель, порядок которого выше третьего?

Решите самостоятельно:

1. Вычислите определители различными способами:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) 87; б) 0; в) 48.

ТЕМА 3.5 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ

Квадратная матрица $A_{n \times n}$ называется *невырожденной*, если определитель $|A| \neq 0$. В противном случае матрица называется *вырожденной*. Обратная матрица существует только для невырожденной матрицы.

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если выполняется условие:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E единичная того же порядка, что и матрица A .

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A .

Теорема. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{алгебраические дополнения}$$

элементов a_{ij} матрицы A .

Пример 1. Исследовать матрицу A на невырожденность, найти A^{-1} , если она существует, результат проверить.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A :

Воспользуемся методом эффективного понижения порядка. Обнулим второй и третий элемент в первой строке. Прибавим к элементам второго столбца соответствующие элементы первого. Прибавим элементы первого столбца, умноженные на (-1) , к элементам третьего.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0.$$

Матрица A невырожденная, так как $|A| \neq 0$, значит существует единственная обратная ей матрица A^{-1} .

Используя формулу, найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

$$\text{Тогда } A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

Для контроля правильности результата достаточно проверить условия $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Действительно,

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/7 & 5/7 & -2/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 5/7 & -4/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1+3+5 & 5-1-4 & -2-1+3 \\ -2-3+5 & 10+1-4 & -4+1+3 \\ -1-9+10 & 5+3-8 & -2+3+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E. \end{aligned}$$

Аналогично $A^{-1} \cdot A = E$.

Рассмотрим матрицу A размером $m \times n$. Выделим k произвольных строк и k произвольных столбцов этой матрицы.

Определитель k -го порядка, составленный из элементов матрицы A , расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется **минором k -го порядка** матрицы A .

Рангом матрицы A размера $m \times n$ называется наибольший порядок её миноров, отличных от нуля. Обозначается $\text{rang } A$, r_A .

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля её минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Основные методы нахождения ранга матрицы A

Метод окаймляющих миноров

Если в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k , $k \in \mathbb{N}$, а все окаймляющие его миноры $(k+1)$ -го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен k ($r_A = k$).

Метод элементарных преобразований

Используя элементарные преобразования над строками, матрицу приводят к трапецевидной или треугольной форме, ранг будет равен количеству не нулевых строк.

Пример 2. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. 1-й способ. Воспользуемся методом окаймляющих миноров. Найдём какой-нибудь минор второго порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут два минора 3-го порядка:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 7 & 5 \\ -22 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, $r_A = 2$, а базисным минором можно считать, например, M_2 .

2-й способ. С помощью элементарных преобразований над строками, приведём матрицу A к виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ранг последней матрицы равен двум, следовательно, таков же ранг исходной матрицы.

Вопросы для самопроверки:

1. Какая матрица называется невыраженной? Выраженной?
2. Какая матрица называется обратной для невыраженной матрицы A ?
3. Запишите формулу для нахождения A^{-1} ?
4. Что называется, минором k -того порядка матрицы A ?
5. Что называется, рангом матрицы?
6. Что называется, базисным минором матрицы?
7. В чём заключается метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы?
8. В чём заключается метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы?

Решите самостоятельно:

1. Найдите матрицу, обратную данной, если она существует

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{Ответ: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

2. Определите ранг матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Ответ: } r_A = 3.$$

$$6) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \text{ Ответ: } r_A = 3.$$

ТЕМА 3.6 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ). РЕШЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СЛУ

Линейной системой m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются коэффициентами системы, а $b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободными членами.

Линейную систему удобно записывать в матричной форме: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}, \text{ - основная матрица системы;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}, \text{ - матрица столбец свободных членов;}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \text{ - матрица столбец неизвестных.}$$

Матрица $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$ называется расширенной матрицей системы.

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1=c_1, x_2=c_2, \dots, x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$. Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы

одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется **определённой**, если она имеет единственное решение, и **неопределённой** если она имеет более одного решения. Система линейных уравнений называется **однородной**, если все её свободные члены

равны нулю. В противном случае она называется **неоднородной**. Однородная система уравнений всегда совместна, т.к. имеет нулевое решение. Система n уравнений с n неизвестными называется **невырожденной**, если основная матрица системы невырожденная.

Методы решение невырожденных СЛУ:

1) Матричный метод:

заключается в решении матричного уравнения $X = A^{-1} \cdot B$.

2) Формулы Крамера:

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1, n}$, где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. 1-й способ. Воспользуемся матричным методом. Запишем основную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель основной матрицы, с помощью метода эффективного понижения порядка (прибавим к элементам третьей строки соответствующие элементы второй, умноженные на (-1)), разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 5) = 2 \neq 0.$$

Так как определитель матрицы не равен нулю, значит матрица невырожденная и для неё существует обратная матрица A^{-1} .

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -3; & A_{21} &= -5; & A_{31} &= 5; \\ A_{12} &= 1; & A_{22} &= 1; & A_{32} &= -1; \\ A_{13} &= 7; & A_{23} &= 13; & A_{33} &= -11. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Значит } X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ – единственное решение.

Получаем ответ: $(-2; 0; 8)$.

2-й способ. Воспользуемся формулами Крамера.

Вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Заменяем в определителе Δ первый столбец столбцом свободных членов и вычисляем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

Заменяем в определителе Δ второй столбец столбцом свободных членов и вычисляем:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяем в определителе Δ третий столбец столбцом свободных членов и вычисляем:

для вычисления также воспользуемся методом эффективного понижения порядка (прибавим к элементам второй строки соответствующие элементы первой, умноженные на 2, прибавим к элементам третьей строки соответствующие элементы первой строки), разложим определитель по элементам третьего столбца

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(28 - 36) = 16.$$

По формулам Крамера, получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{2} = 8.$$

Таким образом получаем решение $(-2; 0; 8)$.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется основной матрицей системы линейных уравнений?
2. Что называется расширенной матрицей системы линейных уравнений?
3. Какая система линейных уравнений называется совместной? Несовместной?
4. Какая система линейных уравнений называется определённой? Неопределённой?
5. Является ли определённая система линейных уравнений совместной?
6. Какая система линейных уравнений называется однородной? Неоднородной?
7. Является ли однородная система линейных уравнений совместной? Определённой?

8. Какая система линейных уравнений называется невырожденной?
9. В чём заключается матричный метод решения невырожденных систем линейных уравнений?
10. Запишите формулы Крамера.
11. Что такое Δ_i в формулах Крамера?

Решите самостоятельно:

1. Решите системы линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ y - z = -3. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 6, \\ x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

Ответы: а) (1, -1, 2), б) (2, 1, 1).

ТЕМА 3.7 РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли:

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы, при этом:

- 1) *если $r_A = r_{A/B} = n$ система имеет единственное решение;*
- 2) *если $r_A = r_{A/B} < n$ система имеет бесчисленное множество решений*

Для решения произвольных систем линейных уравнений применяют **Метод Гаусса:**

*Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований **над строками** приводят к треугольной или трапецевидной форме. Такой матрице соответствует система, которую легко решить, начиная с последнего уравнения.*

Решение произвольной линейной системы из m уравнений и n неизвестных целесообразно начинать с нахождения ранга.

Если $r_A = r_{A/B} = r = n$, то система имеет единственное решение, которое можно получить матричным методом, по формулам Крамера или методом Гаусса.

Если $r_A = r_{A/B} = r < n$, то существует бесконечное множество решений. Для его получения неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ объявляют **базисными**, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — **свободными**, которым присваиваются произвольные численные значения $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$.

Пример 1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований над строками приведём её к трапецевидной форме (прибавим к элементам второй строки элементы первой, умноженные на (-2), прибавим к элементам третьей строки элементы первой, умноженные на (-3), далее прибавим к элементам второй строки элементы третьей, умноженные на (-1), разделим элементы второй строки на 2, прибавим к элементам третьей

строки элементы второй, умноженные на 13):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right].$$

$r_A = r_{A/B} = 3 = n$ – система имеет единственное решение

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 8. \end{cases}$$

Из неё последовательно находим неизвестные, начиная с x_3 :

$$x_3 = 8, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -2 - 5 \cdot 0 = -2,$$

Таким образом, приходим к ответу $(-2; 0; 8)$.

Пример 2. Исследовать систему на совместность и найти ее решение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований над строками приведём её к трапецевидной форме (прибавим к элементам второй строки элементы первой, умноженные на (-3) , прибавим к элементам четвёртой строки элементы первой, умноженные на (-5) , далее прибавим к элементам третьей и четвёртой строки соответствующие элементы второй строки):

$$A/B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$r_A = r_{A/B} = 2 < 5$ т. е. исходная система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3, x_4, x_5 – свободные. Система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные, и решаем указанную систему.

Получаем:

$$x_2 = 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3,$$

$$x_1 = 7 - c_1 - c_2 - c_3 - 23 + 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 = -16 + c_1 + c_2 + 5c_3.$$

Таким образом, решение примет вид:

$$(-16 + c_1 + c_2 + 5c_3; 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3; c_1, c_2, c_3), \text{ где } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Исследовать систему на совместность в случае совместности решить.

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы. Выполним элементарные преобразования над строками:

- поменяем местами первую и третью строки;
- прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-3), прибавим к четвёртой первую, умноженную на (-2);
- прибавим к элементам третьей строки соответствующие элементы второй;
- умножим элементы четвёртой строки на (-2) и прибавим к ним элементы третьей строки

$$A/B = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Получаем $r_A = 3$, а $r_{A/B} = 4$, значит по теореме Кронекера-Капелли система не совместна.

Вопросы для самопроверки:

1. При каком условии произвольная система линейных уравнений совместна?
2. При каком условии произвольная система линейных уравнений имеет единственное решение?
3. При каком условии произвольная система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений?
4. Сформулируйте метод Гаусса для решения произвольных систем линейных уравнений.

Решите самостоятельно:

1. Проверить совместность систем уравнений и в случае совместности решить их методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x - y = -1, \\ x + 2y - z = -2, \\ y + z = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Ответы: 1) $(-1, -1, -1)$; 2) $(x_1, x_2, \frac{3-5x_1+25x_2}{9}, \frac{10x_2-2x_1}{3}), x_1, x_2 \in R$